Soal dan Pembahasan OSN Matematika 2022 Jenjang SMA/MA Sederajat

Hari Pertama

Moh. Yasya Bahrul Ulum S.T., M.T.

Wildan Bagus Wicaksono

Soal

OSN Matematika SMA/MA Sederajat 2022

Hari Pertama

240 menit

Soal 1. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$f(f(f(x)) + f(y)) = f(y) - f(x).$$

Soal 2. Diketahui $P(x)$ suku banyak dengan koefisien bilangan bulat yang memenuhi $P(1) = 10$ dan $P(-1) = 22$.

(a). Berikan contoh $P(x)$ sehingga $P(x) = 0$ memiliki suatu akar bilangan bulat.

(b). Jika $P(0) = 4$, tunjukkan bahwa $P(x) = 0$ tidak memiliki akar bilangan bulat.

Soal 3. Diberikan persegi panjang $ABCD$. Titik E, F terletak pada diagonal AC sehingga F terletak di antara A, E dan E terletak di antara C, F. Lingkaran luar segitiga BEF memotong AB dan BC pada G, H dan lingkaran luar segitiga DEF memotong AD dan CD pada I, J. Buktikan bahwa garis GJ, IH, dan AC berpotongan di satu titik.

Soal 4. Diberikan segi-26 beraturan. Tunjukkan bahwa untuk sembarang 9 titik sudut dari segi-26 tersebut, pasti ada tiga titik yang membentuk segitiga sama kaki.

Soal dan Solusi

Problem 1

Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$f(f(f(x)) + f(y)) = f(y) - f(x).$$

Misalkan $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$ di mana $f^1(x) = f(x)$ dan misalkan pula $P(x, y)$ menyatakan asertasi dari $f\left(f^2(x) + f(y)\right) = f(y) - f(x)$. Kemudian, misalkan $f(0) = a$. Untuk $P(0, 0)$, kita punya

$$f\left(f^2(0) + f(0)\right) = f(0) - f(0) \iff f(f(a) + a) = 0.$$

Untuk $P\left(f(a) + a, f(a) + a\right)$, kita punya

$$f\left(f^2(f(a) + a) + f(f(a) + a)\right) = f(f(a) + a) - f(f(a) + a) \iff f(f(0)) = 0$$

sehingga diperoleh $f(a) = 0$. Untuk $P(0, a)$, maka

$$f\left(f^2(0) + f(a)\right) = f(a) - f(0) \iff f(0) = -f(0)$$

sehingga diperoleh $f(0) = 0$. Untuk $P(x, 0)$, maka

$$f\left(f^2(x) + f(0)\right) = f(0) - f(x) \iff f^3(x) = -f(x).$$

Untuk $P(0, x)$, maka

$$f\left(f^2(0) + f(x)\right) = f(x) - f(0) \iff f^2(x) = f(x)$$

sehingga kita punya

$$-f(x) = f^3(x) = f^2(x) = f(x) \iff -f(x) = f(x) \iff f(x) = 0$$

untuk setiap bilangan riil x. Perhatikan bahwa fungsi ini memenuhi karena

$$f\left(f^2(x) + f(y)\right) = 0 \quad \text{dan} \quad f(y) - f(x) = 0 - 0 = 0.$$

Jadi, $\boxed{f(x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}}$ merupakan satu-satunya solusi.

Solusi Alternatif. Definisikan $f^n(x)$ dan $P(x, y)$ dengan cara yang serupa. Untuk $P(x, f(y))$, kita punya $f\left(f^2(x) + f^2(y)\right) = f^2(y) - f(x)$. Dari $P(y, f(x))$, kita punya

$$f^2(x) - f(y) = f\left(f^2(y) + f^2(x)\right) = f^2(y) - f(x) \iff f^2(x) + f(x) = f^2(y) + f(y). \tag{1}$$

Dengan mengambil $y = 0$ dari (1), kita punya $f^2(x) + f(x) = f^2(0) + f(0) = c \iff f^2(x) + f(x) = c$ untuk setiap bilangan riil x dan suatu konstan c. Dari $P(x, x)$, kita punya

$$f\left(f^2(x) + f(x)\right) = f(x) - f(x) = 0 \iff f(c) = 0.$$

Dari $P(c, c)$, kita punya

$$f\left(f^2(c) + f(c)\right) = f(c) - f(c) = 0 \iff f(f(0)) = 0.$$

Karena $f^2(0) + f(0) = c$, maka $f(0) = c$. Dari $P(0, c)$, kita punya

$$f\left(f^2(0) + f(c)\right) = f(c) - f(0) = c - f^2(c) - c = -f^2(c) \iff f^2(c) = -f^2(c)$$

dan diperoleh $f^2(c) = 0$. Sehingga kita punya $0 = f^2(c) = c - f(c) = c$ sehingga diperoleh $c = 0 \iff f(0) = 0$. Selanjutkan dapat dilakukan hal yang serupa seperti **Solusi 1**.

Problem 2

Diketahui $P(x)$ suku banyak dengan koefisien bilangan bulat yang memenuhi $P(1) = 10$ dan $P(-1) = 22$.

(a). Berikan contoh $P(x)$ sehingga $P(x) = 0$ memiliki suatu akar bilangan bulat.

(b). Jika $P(0) = 4$, tunjukkan bahwa $P(x) = 0$ tidak memiliki akar bilangan bulat.

(a). Perhatikan bahwa $P(x) = 16x^2 - 6x$ berakibat $P(x) = 0$ memiliki akar bulat, yaitu ketika $x = 0$.

(b). Andaikan $P(x)$ memiliki akar bilangan bulat, yaitu $k \in \mathbb{Z}$. Kita punya $P(k) = 0$ dan jelas $k \notin \{-1, 0, 1\}$. Dengan menggunakan fakta $x - y \mid P(x) - P(y)$ untuk setiap dua bilangan bulat x dan y yang berbeda, kita punya

$$\begin{aligned} k - 1 \mid P(k) - P(1) &\implies k - 1 \mid 10 \\ k - (-1) \mid P(k) - P(-1) &\implies k + 1 \mid 22 \\ k - 0 \mid P(k) - P(0) &\implies k \mid 4. \end{aligned}$$

Dari $k \mid 4$, maka $k \in \{-4, -2, 2, 4\}$ sehingga kita punya

$$(k - 1, k, k + 1) = (-5, -4, -3), (-3, -2, -1), (1, 2, 3), (3, 4, 5)$$

yang mana semua pasangan tersebut tidak memenuhi $k - 1 \mid 10, k + 1 \mid 22$, dan $k \mid 4$ sekaligus. Kontradiksi, maka tidak ada bilangan bulat k yang memenuhi $P(k) = 0$. Dengan kata lain, $P(x) = 0$ tidak memiliki akar bilangan bilangan bulat. ■

Remark. Poin (a) tentunya bukan sekedar ide dari "langit", namun ada proses dibaliknya. Pertama, misalkan $P(x) = (x + 1)(x - 1)Q(x) + ax + b$. Sehingga kita punya $a + b = 10$ dan $-a + b = 22$ yang memberikan $(a, b) = (-6, 16)$. Ambil kasus termudah, yaitu jika $Q(x)$ konstan. Misalkan $Q(x) = c$ untuk suatu konstan c, maka

$$P(x) = cx^2 - c - 6x + 16 = cx^2 - 6x + (16 - c).$$

Agar $P(x)$ akar bulat, maka diskriminannya harus kaudrat sempurna, yaitu

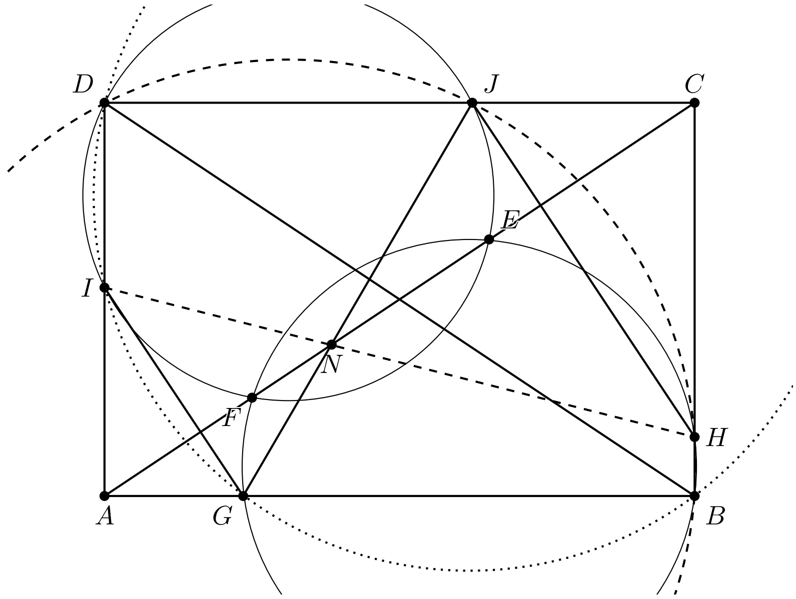
$$k^2 = D = (-6)^2 - 4(c)(16 - c) = 36 - 64c + 4c^2 = 4c^2 - 64c + 36.$$

untuk suatu $k \in \mathbb{N}_0$. Kita peroleh k harus genap, misalkan $k = 2l$ di mana $l \in \mathbb{N}_0$ dan diperoleh $l^2 = c^2 - 16c + 9 = (c - 8)^2 - 55$. Maka kita punya $55 = (c - 8)^2 - l^2 = (c + l - 8)(c - l - 8)$. Ambil $c + l - 8 = 11$ dan $c - l - 8 = 5$ memberikan $(c, l) = (16, 3)$. Maka $P(x) = 16x^2 - 6x$ dan mudah dicek ini memenuhi.

Problem 3

Diberikan persegi panjang $ABCD$. Titik E, F terletak pada diagonal AC sehingga F terletak di antara A, E dan E terletak di antara C, F. Lingkaran luar segitiga BEF memotong AB dan BC pada G, H dan lingkaran luar segitiga DEF memotong AD dan CD pada I, J. Buktikan bahwa garis GJ, IH, dan AC berpotongan di satu titik.

Misalkan GJ dan AC berpotongan di N.



Lemma 1. *$BGID$ dan $BHJD$ segiempat talibusur.*

Bukti. Tinjau bahwa dari Teorema Power of Point kita punya

$$AG \cdot AB = AF \cdot AE = AI \cdot AD \iff AG \cdot AB = AI \cdot AD$$

sehingga kita punya $BGID$ segiempat talibusur. Secara analog, kita punya $BHJD$ segiempat talibusur. $\square$

Lemma 2. *$\triangle AGI \sim \triangle CJH$.*

Bukti. Dari **Lemma 1**, kita punya

$$\angle AGI = \angle BDI = \angle BDA = \angle DBC = \angle DBH = \angle CJH$$

sehingga kita peroleh $\angle AGI = \angle CJH \iff \angle AIG = \angle CHJ$. Kita simpulkan bahwa $\triangle AGI \sim \triangle CJH$. $\square$

Kita punya juga

$$\angle IGN = 180^\circ - \angle AGI - \angle BGN = 180^\circ - \angle DJH - \angle DJN = \angle HNJ.$$

Tinjau bahwa $\angle ANG = \angle CNJ$ dan $\angle GAN = \angle JCN$ sehingga kita peroleh $\triangle AGN \sim \triangle CJN$. Kita punya $\frac{NG}{NJ} = \frac{AG}{CJ}$. Dari **Lemma 2**, kita punya

$$\frac{NG}{NJ} = \frac{AG}{CJ} = \frac{IG}{JH} \iff \frac{NG}{NJ} = \frac{IG}{JH}.$$

Karena juga berlaku $\angle IGN = \angle HNJ$, kita punya $\triangle IGN \sim \triangle JHN$ sehingga kita peroleh $\angle GNI = \angle HNI \iff I, N, H$ segaris. Maka terbukti bahwa GJ, HI, AC berpotongan di satu titik. ■

Solusi Alternatif. Dari kondisi $\angle IGN = \angle HNJ$ menyimpulkan $GI \parallel JH$, sehingga kita bisa simpulkan terdapat dilatasi $h(N, r) : GI \mapsto JH$. Artinya, $h(N, r) : I \mapsto H$ sehingga dapat disimpulkan I, N, H segaris. ■

Problem 4

Diberikan segi-26 beraturan. Tunjukkan bahwa untuk sembarang 9 titik sudut dari segi-26 tersebut, pasti ada tiga titik yang membentuk segitiga sama kaki.

Misalkan titik sudut segi-26 beraturan tersebut adalah $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{26}$ dalam urutan tersebut searah jarum jam. Kita sebut sebuah titik A_i sebagai *titik genap* apabila i bilangan genap dan disebut *titik ganjil* apabila i ganjil. Dari 9 titik yang diambil, menurut Pigeon Hole Principle, maka pasti terdapat 5 titik ganjil atau 5 titik genap. W.L.O.G. terdapat lima titik genap.

Lemma. *Setiap dua titik genap pada segi-26 beraturan, misalkan X dan Y, maka ada sebuah titik genap Z sehingga $XZ = YZ$. Definisikan pula titik Z adalah kepala segitiga sama kaki dengan alas AB.*

Bukti. Misalkan ω lingkaran luar dari segi-26 beraturan dan misalkan pula pusat lingkarannya adalah O. Perhatikan bahwa A_iA_{i+14} merupakan diameter ω untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, 12$. Artinya, sebuah diameter dibentuk dari dua titik genap atau dua titik ganjil. Ambil dua titik, misalkan A_i dan A_j di mana $1 \leq i, j \leq 26$ dan $i \neq j$. Perhatikan bahwa garis sumbu A_iA_j melalui dua titik sudut dari segi-26 beraturan, katakan A_x dan A_y. Perhatikan bahwa A_xA_y merupakan diameter ω, maka

$$x \equiv \frac{i+j}{2} \pmod{26} \quad \text{dan} \quad y \equiv \frac{i+j}{2} - 13 \pmod{26}$$

serta didapat $A_xA_i = A_xA_j$ dan $A_yA_i = A_yA_j$. Maka salah satu dari A_x atau A_y merupakan titik genap. $\square$

Misalkan lima titik genap tersebut adalah $A_{b_1}, A_{b_2}, A_{b_3}, A_{b_4}$, dan A_{b_5}. Banyak segmen yang dapat dibentuk dari lima titik tersebut adalah $\binom{5}{2} = 10$. Andaikan dari lima titik tersebut tidak ada yang membentuk segitiga sama kaki. Perhatikan bahwa untuk setiap segmen dari lima titik tersebut memiliki total 10 kepala segitiga, di mana kepala segitiga tersebut bukan dari $A_{b_1}, A_{b_2}, A_{b_3}, A_{b_4}, A_{b_5}$. Sehingga ada $13 - 5 = 8$ titik genap yang mendati kemungkinan kepala segitiga. Dari 10 kepala dan hanya ada 8 kemungkinan, menurut Pigeon Hole Principle, berlaku terdapat dua pasang alas $A_{b_i}A_{b_j}$ dan $A_{b_m}A_{b_n}$ yang memiliki kepala segitiga yang sama. W.L.O.G. $A_{b_1}A_{b_2}$ dan $A_{b_3}A_{b_4}$ memiliki kepala segitiga yang sama, maka $b_1 + b_2 \equiv b_3 + b_4 \pmod{26}$. Kita bagi tiga kasus.

Kasus 1. Jika $A_{b_1}A_{b_2}$ dan $A_{b_3}A_{b_5}$ memiliki kepala segitiga yang sama, maka

$$b_3 + b_4 \equiv b_1 + b_2 \equiv b_3 + b_5 \pmod{26} \iff b_4 \equiv b_5 \pmod{26}$$

yang mana tidak mungkin.

Kasus 2. Jika $A_{b_1}A_{b_3}$ dan $A_{b_2}A_{b_4}$ memiliki kepala segitiga yang sama, maka

$$b_1 + b_3 \equiv b_2 + b_4 \pmod{26} \iff b_1 + b_3 - (b_1 + b_2) \equiv b_2 + b_4 - (b_3 + b_4) \pmod{26}$$

sehingga diperoleh $b_2 \equiv b_3 \pmod{13}$. Dengan cara sama, diperoleh $b_1 \equiv b_4 \pmod{13}$. Hal ini menyimpulkan $A_{b_1}A_{b_3}$ dan $A_{b_2}A_{b_4}$ diameter ω. Namun, hal ini kontradiksi karena haruslah $\{b_1, b_3\} = \{b_2, b_4\}$.

Kasus 3. Jika $A_{b_1}A_{b_3}$ dan $A_{b_2}A_{b_5}$ juga memiliki kepala segitiga yang sama, maka

$$b_1 + b_3 \equiv b_2 + b_5 \pmod{26} \iff b_1 + b_3 + b_1 + b_2 \equiv b_2 + b_5 + b_3 + b_4 \pmod{26}$$

dan diperoleh $2b_1 \equiv b_4 + b_5 \pmod{26}$. Maka $A_{b_1}A_{b_4}A_{b_5}$ membentuk segitiga sama kaki. Kontradiksi.

Jadi, haruslah dari 5 titik tersebut pasti ada yang membentuk segitiga sama kaki. ■